Problem parketiranja

Stanko Bilinski

U špiljama, koje je prije mnogo desetaka tisuća godina nastavao pračovjek, može se često naići na crteže urezane u kamene stijene. Ti primitivni crteži predstavljaju obično ili događaje iz svakidašnjeg života pračovjeka ili neke životinje kao mamute, divlja goveda, medvjeda i slično. Već u ta pradavna vremena opaža se potreba čovjeka da prostorije u kojima boravi budu ne samo udobne nego i lijepe. Dakako da se s postepenim društvenim napretkom, a time i razvojem čovječje kulture i ta potreba za lijepim sve više zapaža. Od primitivnih crteža urezanih u kamen iz davnih prethistorijskih vremena postepeno nastaju skladni crteži i lijepe slike, kojima je čovjek ukrašavao svoje nastambe i hramove svojih bogova. I sada ti crteži predočuju kadgod predmete ili događaje iz prirode. Ali kadgod se oni na neki način ritmički pojednostavnjuju, figure se periodički ponavljaju, poprimaju geometrijske oblike s mnogo simetrija i pokazuju takvu pravilnost kakvu u prirodi rijetko kada susrećemo. Tako je pomalo od slobodnih crteža nastao ornament. No stvaralac takvih ornamenata morao je s estetskim ukusom sjediniti i stanovito, makar i jednostavno, geometrijsko znanje.

Kod starih kulturnih naroda ističu se osobito egipatske građevine bogatom ornamentikom. O Egipćana su taj smisao za ornamente naslijedili Arapi, ali oni su ga još i dalje usavršili, o čemu nam svjedoče arabeske na divnim arapskim građevinama iz srednjeg vijeka. S propašću arapske države, a zatim i kulture pada i važnost ornamenata kod ukrašavanja građevina, pa i današnji rijetki ornamenti u većini slučajeva su kopije onih iz starog i srednjeg vijeka.

Težnja da se zidovi i podovi građevina pravilno ukrase geometrijskim figurama stvorila je i problem parketiranja, tj. problem kako se može ravnina razdijeliti na poligone, koji bi je potpuno i jednostruko prekrivali, ali uz neke određene uvjete, koji traže stanovite pravilnosti s obzirom na oblik, vrstu i poredak poligona.

Dakako da možemo zamisliti vrlo različite geometrijske uvjete, kojima bi takvo "parketiranje" moralo zadovoljavati, pa će stoga tu biti zapravo mnogo različitih problema, a time očito i različitih rješenja.

Mi ćemo pokazati, kako se takav problem može postaviti i kako se na jednostavan način mogu naći moguća rješenja koja zadovoljavaju postavljenim uvjetima.

U tu svrhu moramo najprije dati neke definicije: onu točku ravnine, u kojoj se kod neke razdiobe na poligone sastaju vrhovi susjednih poligona, zvat ćemo "čvorištem". Ako su svi kutovi, koji se u jednom čvorištu sastaju, međusobno jednaki zvat ćemo to čvorište "pravilnim". Osim toga ćemo reći da su dva čvorišta sukladna, ako je slijed kutova, koji se u njemu sastaju isti, tj. ako su dva po dva kuta u oba čvorišta međusobno jednaka i ako su oni oko čvorišta poredani istim ili obrnutim redom.

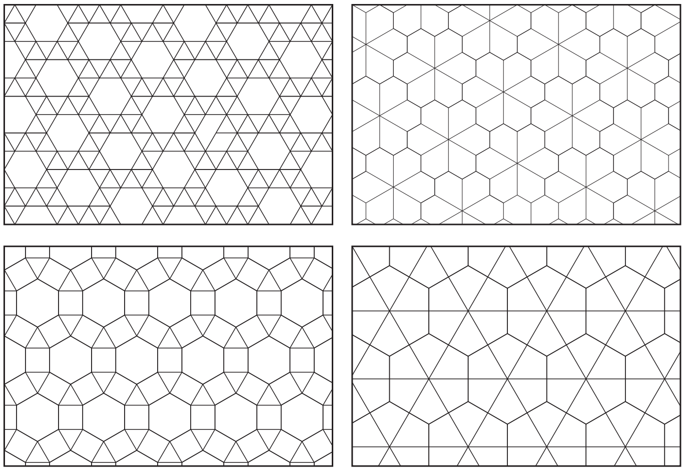
Postavljamo sada zadatak: naći sve moguće razdiobe ravnine u pravilne poligone, koji mogu imati različit broj stranica, no sve stranice neka su međusobno jednake, a sva čvorišta neka su međusobno sukladna. Na lijevoj polovici priložene slike predočene su dvije poligonske razdiobe ravnine, koje zadovoljavaju ovim uvjetima.

Da dođemo do svih mogućih rješenja postavljenog zadatka namiče nam se kao prvi uvjet, koji svakako mora kod moguće razdiobe ravnine biti ispunjen, taj, da zbroj svih kutova koji se sastaju u jednom čvorištu, iznosi 360°.

Znamo da zbroj kutova u trokutu iznosi 180°. No svaki n-terokut možemo razdijeliti na $n-2$ trokuta i to tako, da iz jednog njegovog vrha povučemo sve dijagonale.

Odatle odmah slijedi već poznata činjenica, da zbroj kutova u svakom n-terokutu iznosi $(n-2)\cdot 180^\circ$, pa će prema tome jedan kut pravilnog n-terokuta iznositi

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}.$$



Uzmimo sada najprije slučaj našeg zadatka, gdje su svi poligoni jednakog broja stranica, pa neka se dakle u svakom čvorištu sastane po k n-terokuta, tada možemo gore postavljeni uvjet izraziti jednadžbom

$$k\cdot\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=360^\circ.$$

Skratimo li ovu jednadžbu sa 180°, a zatim još s $2k$, to ćemo nakon male preinake dobiti jednadžbu

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Dakle smo kao nužni uvjet, koji mora biti ispunjen za mogućnost rješenja postavljenog zadatka, dobili jednu diofantsku* jednadžbu, tj. jednadžbu, kojoj se traže rješenja samo u cijelim brojevima.

Iz prirode samog zadatka slijedi da mora biti $k\geqslant 3$ i $n\geqslant 3$, jer se u jednom čvorištu ne može sastati manje od tri poligona, niti može poligon imati manje od tri strane.

Stavimo li pokušavajući u gornju jednadžbu za n redom vrijednosti 3, 4, 5, 6, 7, $\ldots$, to ćemo za k dobiti redom 6, 4, $3\frac{1}{3}$, 3, $2\frac{4}{5}$, $\ldots$. Prema tome naša diofantska jednadžba ima uz gore spomenute uvjete samo ova tri rješenja:

n	3	4	6
k	6	4	3

Ova nam rješenja kazuju već poznatu činjenicu, da se ravnina dade razdijeliti na istostrane trokute, na kvadrate i na pravilne šesterokute i to tako, da ih se u jednom čvorištu sastane po šest, po četiri, odnosno po tri, ali da su to ujedno jedine moguće razdiobe ravnine na istovrsne pravilne poligone.

* Diofant, grčki matematičar, živio u Aleksandriji u 3. st. n. e.

Ovi slučajevi razdiobe ravnine bili su poznati već u Pitagorinoj školi.

Promotrimo sada slučaj našeg zadatka gdje dolazi više vrsta poligona. Budući da zbroj od po jednog kuta pravilnog trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta iznosi 378°, dakle, premašuje 360°, to je očito da u jednoj takvoj razdiobi ravnine ne može biti više od tri različite vrste poligona.

Uzmimo najprije slučaj gdje u razdiobi ravnine dolaze dvije različite vrste poligona, pa neka se dakle u svakom čvorištu sastane po k_1 n_1-terokuta i k_2 n_2-terokuta. Tada možemo zaključiti slično kao i prije, da mora vrijediti jednadžba:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} = 360^\circ.$$

Skratimo li ovu jednadžbu s 360°, to dobivamo nakon malog pojednostavljenja

$$k_1\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\Big) + k_2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\Big) = 1.$$

Ova nam diofantska jednadžba daje nužni uvjet za mogućnost rješenja postavljenog zadatka u tom slučaju. Dakako da i sada možemo, slično kao i prije, zaključiti, da mora biti

$$k_1 + k_2 \geqslant 3; \quad n_1 \geqslant 3; \quad n_2 \geqslant 3.$$

U slučaju da u razdiobi dolaze tri vrste poligona od kojih se u svakom čvorištu sastaje po k_1 n_1-terokuta, po k_2 n_2-terokuta i po k_3 n_3-terokuta, dobili bismo na isti način kao uvjetnu jednadžbu:

$$k_1\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\Big) + k_2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\Big) + k_3\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_3}\Big) = 1,$$

no pritom mora i opet biti

$$k_1 + k_2 + k_3 \geqslant 3; \quad n_1 \geqslant 3; \quad n_2 \geqslant 3; \quad n_3 \geqslant 3.$$

I sada možemo, kao i prije, do rješenja ovih diofantskih jednadžbi doći pokušavanjem. Samo moramo pritom dobro paziti i postupati tako da ne previdimo nijedno moguće rješenje, koje zadovoljava našim uvjetima. Uzmimo kada u razdiobi ravnine dolaze dvije vrste poligona. Tada možemo već unaprijed zaključiti da mora biti $k_1 + k_2 < 6$, jer bi šest pravilnih poligona moglo stati oko jednog čvorišta samo u slučaju kad bi svi bili trokuti. Prema tome za brojeve k_1 i k_2 postoji samo ovih devet mogućnosti:

k_1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
k_2	2	1	3	2	1	4	3	2	1

Za svaku od ovih mogućnosti moramo napose potražiti sva moguća rješenja naše jednadžbe. Uzmimo npr. slučaj $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Uvrstimo li te vrijednosti u jednadžbu, pa ju još malo uredimo, dobivamo

$$\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

Stavljamo li sada za n_2 redom vrijednosti 3, 4, 5, ..., to ćemo dobiti ovaj niz rješenja

n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n_1	-6	∞	10	6	$\frac{14}{3}$	4	$\frac{18}{5}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{22}{7}$	3	...

Dakako vidimo i opet, da samo neka od tih rješenja zadovoljavaju našim uvjetima.

Na posve sličan način možemo ispitati i preostalih osam mogućnosti, a ona analogno i u slučajevima gdje dolaze po tri vrste poligona. Sva rješenja, koja ujedno zadovoljavaju svim postavljenim uvjetima dana su u ovoj tablici:

n_1	3	4	6	3	4	5	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3
k_1	6	4	3	1	1	2	2	4	3	1	1	1	1	1	1	2	1
n_2	–	–	–	12	8	10	6	6	4	7	8	9	10	6	5	4	4
k_2	–	–	–	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2
n_3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	24	18	15	12	20	12	6
k_3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1	1	1	1	1	1	1

Vidimo dakle, da nam naše diofantske jednadžbe daju u svemu 17 rješenja. Ne možemo unaprijed očekivati da će svako od tih rješenja dati jednu moguću razdiobu ravnine u pravilne poligone, jer su postavljeni nužni uvjeti tražili samo, da zbroj svih kutova oko jednog čvorišta iznosi 360°. I doista, uzmemo li slijed poligona, načinjen prema kojem god rješenju iz gornje tablice, to ćemo opaziti da te poligone možemo u ravnini poredati oko jedne točke — čvorišta — tako, da svi kutovi oko te točke ispunjaju puni kut. No pokušamo li sada, pošavši od tog početnog čvorišta, nastaviti popločivanje ravnine izgrađujući postepeno susjedna čvorišta, tako da budu sva međusobno sukladna, to ćemo u više slučajeva opaziti nakon par koraka da daljnje popločivanje ravnine nije moguće. Tako npr. već šesto rješenje iz gornje tablice, tj. dva peterokuta i jedan deseterokut ili, kako ćemo kraće pisati slijed $(5,5,10)$ ne daje moguće popločenje, jer se niti sva čvorišta oko jednog peterokuta ne daju na taj način izgraditi. Ipak ima u svemu 11 sljedova poligona načinjenih prema rješenjima iz naše tablice, koji daju moguće ravnine, a to su ovi: $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$, $(6,6,6)$, $(3,12,12)$, $(4,8,8)$, $(3,6,3,6)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,4,3,4)$, $(3,3,3,4,4)$, $(4,6,12)$ i $(3,4,6,4)$. Crteži razdioba ravnine za sljedove $(3,3,3,3,6)$ i $(3,4,6,4)$ nalaze se na lijevoj polovini priložene slike. Preostalih devet neka čitalac pokuša sam nacrtati.

Već smo prije istakli, da se problem parketiranja može na više načina postaviti stavljajući različite uvjete pravilnosti. Promotrit ćemo ovdje još jedan takav slučaj. U prvom smo slučaju stavili kao uvjet pravilnost svih poligona i sukladnost svih čvorišta. Uzmimo sada obrnuto, i potražimo one razdiobe ravnine, kod kojih su sva čvorišta pravilna, ali ne moraju biti međusobno sukladna, dok za poligone nećemo tražiti pravilnosti, ali tražimo da budu svi međusobno sukladni i da im se kružnica dade upisati, tj. da svi budu tangentni poligoni. Crteži razdioba ravnine, koje bi zadovoljavale ovim uvjetima nalaze se na desnoj polovici priložene slike. I za ovako postavljeni zadatak mogli bismo slično kao i u prošlom slučaju postaviti nužne uvjete u obliku diofantskih jednadžbi. No taj posao možemo sada pojednostavniti i konstruirati sva rješenja tako postavljenog zadatka iz slika prvog problema. Ucrtajmo u te slike okomice, koje su iz središta poligonu upisanih kružnica spuštene na sve njegove stranice. Učinimo li to za svaki poligon, to će sve tako konstruirane dužine činiti novu razdiobu ravnine, koja će zadovoljavati uvjetima drugog problema. Izvedemo li s tom razdiobom ravnine i opet istu konstrukciju, to ćemo ponovno dobiti sliku razdiobe iz prvog problema od koje smo pošli.

Po dva takva crteža iz prvog i drugog problema nalaze se na priloženoj slici jedan pokraj drugog.

Pokazali smo, kako se mogu lako uz primjenu posve jednostavnih matematičkih sredstava riješiti dva najjednostavnija slučaja problema parketiranja, no to je tek maleni početak jednog dugog niza pitanja, koja bismo ovdje mogli postaviti. Dakako, kada bismo u suštinu samog problema u njegovoj općenitosti malo dublje zašli, tada to više ne bi bilo tako lako i ne bi se dalo riješiti onim sredstvima, kojima za sada raspolažemo.